Probe klausur 07/08

Aufgabe 4

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Formel gilt.

$$\sum_{i=1}^{n}(4i-3) = n(2n-1)$$

WS 07/08

Aufgabe 4

Beweisen Sie folgende Formel mit vollständiger Induktion.

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Nachklausur 07/08

Aufgabe 5

Beweisen Sie folgende Formel mit vollständiger Induktion.

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \sum_{k=1}^{n} 2 \cdot 3^{k-1} = 3^n - 1.$$

[*8 Punkte*]

WS 08/09

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

SS 09

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+10)(k+11)} = \frac{1}{10} - \frac{1}{n+11}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

[*10 Punkte*]

WS 09/10

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

SS 10

Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

WS 10/11

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $n^2 > n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt.

[*8 Punkte*]

SS 11

Aufgabe 1

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mit A^n bezeichnen wir das n-fache Produkt, also $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ Mal}}$.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

gilt.

[*8 Punkte*]

WS 11/12

Aufgabe 1

Suchen Sie die kleinste natürliche Zahl, für die die Ungleichung $4n + 3 \leq 2^n$ gilt, und beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Ungleichung auch für alle natürlichen Zahlen, die größer sind als diese, erfüllt ist.

[*8 Punkte*]

SS12

Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} k^2 = n(2n-1)$.

[*10 Punkte*]

WS 12/13

Aufgabe 1

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Formel für die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \; .$$

SS 13

Aufgabe 4

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{e^x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für die n-te Ableitung

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(x-n)}{e^x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt.

WS 13/14

Aufgabe 1

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mit A^n bezeichnen wir das n-fache Produkt, also $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{n \text{ Mal}}$.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

SS 14

Aufgabe 1

Sei $a \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin(ax)$.

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $f^{(2n)}(x) = (-1)^n a^{2n} \sin(ax)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Dabei bezeichnet $f^{(2n)}(x)$ die $2n$te Ableitung von f an der Stelle x.

[*10 Punkte*]

WS 14/15

Aufgabe 1

Eine Folge (a_n) sei definiert durch

$$a_1 = 10\,, \quad a_{n+1} = 2 + \sqrt{2a_n - 1} \quad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $a_n \geq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (woraus insbesondere erst folgt, dass die Folgenglieder für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert sind!).

SS 15

Aufgabe 1

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a \leq 1$.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $(1+a)^n \leq 1 + (2^n - 1)a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[*10 Punkte*]

WS 15/16

Aufgabe 1

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mit A^n bezeichnen wir das n-fache Produkt, also $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ Mal}}$.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[*8 Punkte*]

SS 16

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$2n + 1 \leq n^2 \leq 2^n$$

für alle $n \geq 4$ gilt.

WS 16/17

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\,.$$

SS 17

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 e^{-x}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \left(n(n-1) - 2nx + x^2\right) e^{-x}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dabei ist mit $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung von f gemeint. Sie müssen nicht zeigen, dass diese existiert.

WS 17/18

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Ungleichung für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq n^3\,.$$

SS 18

Aufgabe 1

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

WS 18/19

Aufgabe 1

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2\ .$$

[*8 Punkte*]

SS 19

Aufgabe 1

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{e^x}$. Diese Funktion ist unendlich oft differenzierbar, was Sie nicht zeigen müssen. Zeigen Sie mit Induktion nach n, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ für die n-te Ableitung der Funktion $f^{(n)}$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(x-n)}{e^x}.$$